

2.8.2 Représentation matricielle d'un digraphe (graphe orienté).

2.8.2.1: Matrice d'adjacence.

Def: Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté / l'ordre du graphe est $|V| = n$. On suppose que les sommets st numérotés de 1 à n .

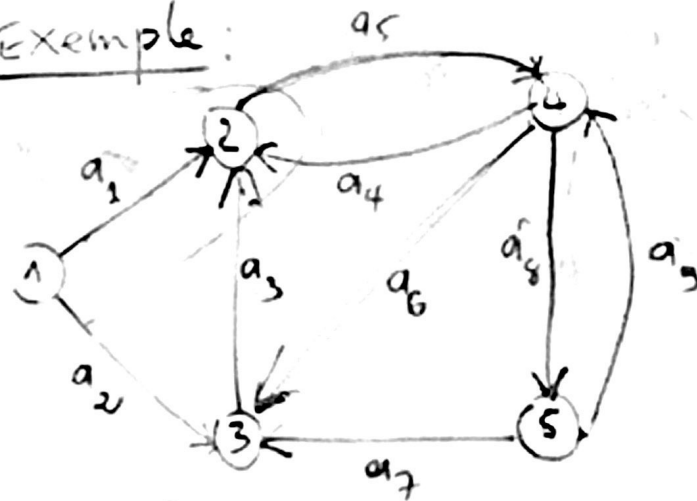
La matrice d'adjacence de G est la matrice carrée $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$ définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} k & \text{s'il y a } k \text{ arcs orientés de } i \text{ vers } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque: Dans le cas orienté, la matrice d'adjacence

$1 \bar{a} 2 \bar{e} 4 \bar{d} 2$

Exemple :



$$a_j \leftarrow f, \quad j = 1, \dots, 9$$

La matrice d'incidence est une matrice de type $(5, 9)$.

Dans cette matrice les lignes désignent les sommets et les colonnes, les arcs.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

les coefficients de la matrice d'incidence
d'un graphe orienté G peuvent être $-1, 0$ ou 1 .

Soit M la matrice d'incidence. C'est une
matrice de type (n, m) : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$

Le coefficient m_{ij} de M indique la relation
qui existe entre le sommet i de G et l'arc j
de G .

* $m_{ij} = 0$ lorsque le sommet i et l'arc j ne
sont pas adjacents.

$m_{ij} = 1$ lorsque le sommet i est l'extrémité
initiale (origine) de l'arc j .

$m_{ij} = -1$ lorsque le sommet i est l'extrémité
finale de l'arc j .

b.) Pour chaque arc $(u, v) \in E$:

si $\lambda(v) > \lambda(u) + w(u, v)$, alors

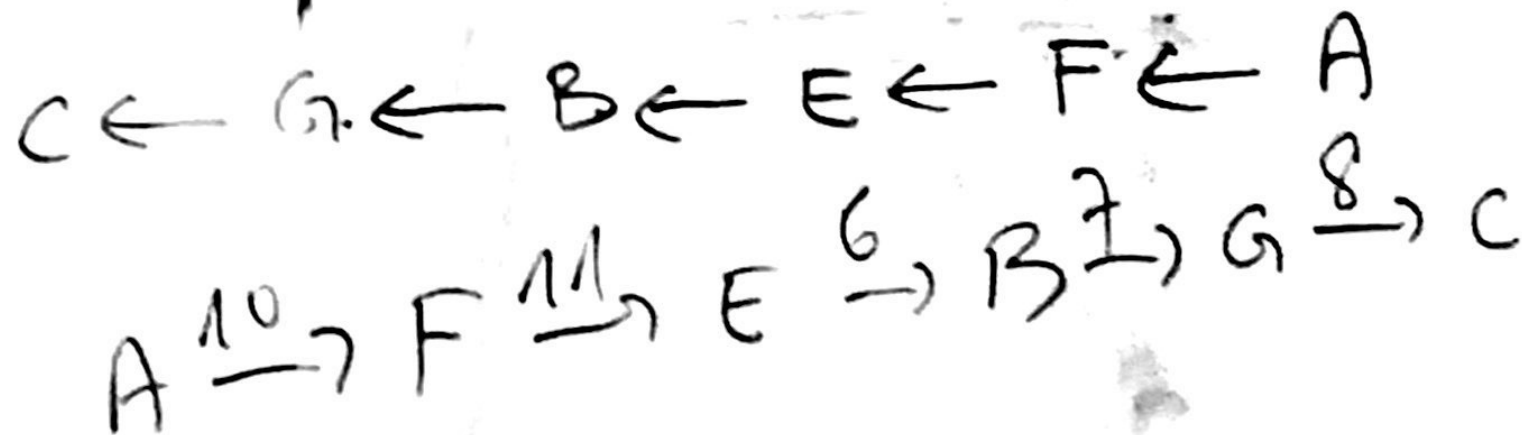
$$\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + w(u, v)$$

$$\text{pred}(v) = u.$$

iterations	A	B	C	D	E	F	G	U
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\{A, B, C, E, F, G\}$
1	X	28.A		19.A		10.A		B, C, D, E, F, G
2	X	28.A		19.A	21.F	X	37.F	B, C, D, E, G
3	X	28.A		X	21.F	X	37.F	B, C, E, G
4	X	27.E	48.E	X	X	X	37.F	B, C, G
5	X	X	48.E	X	X	X	34.B	C, G
6	X	X	42.G	X	X	X	X	C
7	X		X					$\emptyset$

La longueur du plus court chemin
qui mène de A à C est

$$\lambda(C) = 42 \text{ km}$$



Iteration	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	4.C		X	10.C	16.C					
2	X	14.A	X	8.A		14.A				
3	X	14.A	X	X		14.A	29.D			
4	X	X	X	X	16.C	14.A	29.D	∞	31.B	24.B
5	X	X	X	X	16.C	X	17.F	17.F	31.B	24.B
6	X	X	X	X	X	X	17.F	17.F	31.B	24.B
7	X	X	X	X	X	X	X	17.F	31.B	20.G
8	X	X	X	X	X	X	X	X	31.B	20.G
9	X	X	X	X	X	X	X	X	28.J	X
10									X	

$U = 0$

Remin :

$C \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow I$

$I \leftarrow J \leftarrow G \leftarrow F \leftarrow A \leftarrow C$